Minetou Mbarack el Kory
Toutou mnt cheikhne
oumou selemeta / seyide

Integrales - Primitives

Exercice 10

En utilisant le changement de variable, calculer les intégrales suivantes:

$I_1=\int_1^2 \frac{dx}{(4x+5)^5}$; $t=4x+5$ $\qquad$ $I_2=\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$; $x=\tan t$

$I_3=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4dx}{1+\cos x}$; $t=\tan\frac{x}{2}$ $\qquad$ $I_4=\int_2^3 \frac{x^3dx}{\sqrt{x-1}}$; $t=x-1$

$I_5=\int_0^2 \frac{\sqrt{x+1}}{x^2+3x+2}dx$; $t=\sqrt{1+x}$ puis $t=\tan u$.

$\otimes\ I_1 = \int_1^2 \frac{dx}{(4x+5)^5} \qquad t=4x+5$

$\begin{cases} x=1 \Rightarrow t=9 \\ x=2 \Rightarrow t=13 \end{cases}$

$dt = 4dx \Rightarrow dx = \frac{1}{4}dt$

$I_1 \int_9^{13} \frac{1}{4}\,\frac{1}{t^5}\,dt$

$= \frac{1}{4}\int_9^{13} t^{-5}\,dt$

$\frac{1}{4}\times\left[\frac{1}{-4}t^{-4}\right]_9^{13}$

$I_1 = -\frac{1}{16}\left(13^{-4}-9^{-4}\right)$

$\otimes\ I_2 = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} \qquad x=\tan t$

$\begin{cases} x=1 \Rightarrow \tan 1 \Rightarrow t=\frac{\pi}{4} \\ x=\sqrt{3} \Rightarrow \tan\sqrt{3} \Rightarrow t=\frac{\pi}{4} \end{cases}$

$dx = (1+\tan^2 t)\,dt$

$dx = (1+x^2)\,dt$

$I_2 = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\cancel{(1+x^2)}}{\cancel{1+x^2}}\,dt$

$I_2 = \int_{\pi/4}^{\pi/3} dt \Rightarrow I_2 = [t]_{\pi/4}^{\pi/3}$

$I_2 = \frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4} \Rightarrow I_2 = \frac{\pi}{12}$

$\otimes\ I_3 = \int_0^{\pi/2} \frac{4dx}{1+\cos x} \qquad x=\tan x$

$\begin{cases} x=0 \Rightarrow \tan 0 \Rightarrow t=0 \\ x=\pi/2 \Rightarrow \tan \pi/2 \Rightarrow t=1 \end{cases}$

$dt = \frac{1}{2}\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)dx$

$dt = \frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}\,dx$

on sait que $1+\cos x = 2\cos^2 x$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

Alors

$I_3 = \int_0^1 \frac{4\times 2\cos^2 x/2}{2\cos^2 x/2}\,dt \quad = 4\,dt$

$I_3 = \int_0^1 4\,dt$

$I_3 = [4t]_0^1 \Rightarrow I_3 = 4$

$\otimes I_4 = \int_2^3 \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x-1}} \qquad t = x-1$

$\begin{cases} x = 2 \Rightarrow t = 1 \\ x = 3 \Rightarrow t = 2 \end{cases}$

$dt = dx$

$t = x-1 \Rightarrow x = t+1$

$I_4 = \int_1^2 \frac{(t+1)^3}{\sqrt{t}}\,dt$

$= \int_1^2 \frac{(t+1)^3}{\sqrt{t}}\,dt$

$= \int_1^2 \frac{(t^3+3t^2+3t+1)}{t^{1/2}}\,dt$

$I_4 = \int_1^2 t^{5/2} + 3t^{3/2} + 3t^{1/2} + t^{-1/2}\,dt$

$I_4 = \left[\frac{1}{\frac{5}{2}+1} t^{\frac{5}{2}+1} + \frac{3}{\frac{3}{2}+1} t^{\frac{3}{2}+1} + 3\frac{1}{\frac{1}{2}+1} t^{\frac{1}{2}+1} + \frac{1}{-\frac{1}{2}+1} t^{-\frac{1}{2}+1}\right]_2^2$

$I_4 = \left[\frac{2}{7} t^{7/2} + \frac{6}{5} t^{5/2} + 2t^{3/2} + 2t^{1/2}\right]_2^2$

$I_4 = \left[\frac{2}{7} t^3\sqrt{t} + \frac{6}{5} t^2\sqrt{t} + 2t\sqrt{t} + 2\sqrt{t}\right]_2^2$

$I_4 = \sqrt{t}\left(\frac{2}{7}t^3 + \frac{6}{5}t^2 + 2t + 2\right]_1^2$

$I_4 = \sqrt{2}\left(\frac{16}{7} + \frac{24}{5} + 6\right) - \left(\frac{2}{7} + \frac{6}{5} + 4\right)$

$I_5 = \int_0^2 \frac{\sqrt{x+1}}{x^2+3x+2}\,dx$

1ère étape $\qquad t = \sqrt{x+1}$

$\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 1 \\ x = 2 \Rightarrow t = \sqrt{3} \end{cases}$

$dt = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}\,dx$

$= \frac{1}{2t}\,dx \Rightarrow dx = 2t\,dt$

on sait que

$x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2)$

$= t^2(t^2+1)$

Alors $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{t \cdot 2t}{t^2(t^2+1)}\,dt$

$I_5 = 2\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dt}{t^2+1}$

2ème étape $\qquad t = \tan u$

$\begin{cases} t = 1 \Rightarrow \tan u = 1 \Rightarrow \pi/4 = u \\ t = \sqrt{3} \Rightarrow \tan\sqrt{3} = \pi/3 \end{cases}$

$dt = (1+\tan^2 u)\,du$

$I_5 = 2\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{(1+\tan^2 u)}{\tan^2 u + 1}\,du$

$I_5 = 2\int_{\pi/4}^{\pi/3} du$

$I_5 = [2u]_{\pi/4}^{\pi/3}$

$I_5 = 2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)$

$I_5 = \pi/6$

Toutou /cheikhna   Oumouselemta /Seyid   Minetou /elKory

Integrales - Primitives

Exercice 6

Pour tout entier naturel n on pose: $U_n = \int_0^1 \frac{t^n dt}{1+t^2}$.

1) Prouver que l'écriture précédente définit bien une suite numérique (U_n).

2) Montrer que la suite (U_n) est décroissante et positive. En déduire qu'elle est convergente.

3) Montrer que: $\lim\limits_{n \to \infty} U_n = 0$.

Solution - exo 6

1)

$$U_n = \int_0^1 \frac{t^x}{1+t^2}\, dt$$

Comme la fonction $t \to \frac{t^x}{1+t^2}$ est un fonction rationnelle dont le denominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, elle est continue sur $\mathbb{R}$ et dons sur $[0;1]$ d'ou l'integralle U_n existe et l'ecriture $\int_0^1 \frac{t^x}{1+t^2}\, dt$ definie bien une suite numerique

2) $U_n \int_0^1 \frac{t^x}{1+t^2}\, dt$ et

$$U_{n+1} = \int_0^1 \frac{t^{x+1}}{1+t^2}\, dt$$

on'a

: $0 \leqslant t \leqslant 1$ et en multipliant par $\frac{t^x}{1+t^2}$ qui est > 0 sur $[0;1]$

on obtient

$$0 \leqslant \frac{t^{n+1}}{1+t^2} \cancel{dt} \leqslant \frac{t^n}{1+t^2}$$

d'ou

$$\int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t^2}\, dt \leqslant \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}\, dt$$

Donc $\forall x \in \mathbb{N}$

$$0 \leqslant U_{n+1} \leqslant U_n$$

D'ou (U_n) est $\searrow$ et positive

et comme elle est $\searrow$ et minorée par (0), elle est donc convergente.

3/ $U_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}\, dt$

$0 \leqslant \frac{1}{1+t^2} \leqslant 1$ et en multipliant par t^n (qui est $\geqslant 0$ sur $[0;1]$)

On obtient

$$\frac{1}{2} t^n \leqslant \frac{t^n}{1+t^2} \leqslant t^n$$

Donc : $\frac{1}{2} \int_0^1 t^x\, dt \leqslant \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}\, dt$

$$\leqslant \int_0^1 t^n\, dt$$

D'ou $\frac{1}{2}\left[\frac{t^{n+1}}{x+1}\right]_0^1 \leqslant U_n \leqslant \left[\frac{t^{n+1}}{x+1}\right]_0^1$

Donc : $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1} - 0\right) \leqslant U_n \leqslant \frac{1}{x+1} - 0$

D'ou : $\forall x \in \mathbb{N} : \frac{1}{2(x+1)} \leqslant U_n \leqslant \frac{1}{x+1}$

Or : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{2(x+1)} = 0$

et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x+1} = 0$

D'ou d'après le T.G

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} U_n = 0}$$

TouTou bmi cheikhna Oumoussalemata / seyida Ninetou / elkory

Exercice 12

Soit f une fonction continue sur un intervalle ouvert I. Soient a et b des réels dans I.

Prouver que: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$.

2) On pose $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x dx}{\cos^3 x + \sin^3 x}$; $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x dx}{\cos^3 x + \sin^3 x}$.

Montrer que I=J. Calculer I+J. En déduire I et J.

3) Calculer $K = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (\sqrt{\cos x} - \sqrt{\sin x})dx$.

solution : - exo 12

1) on pose $t = a + b - x$

$\begin{cases} x = a \Rightarrow t = b \\ x = b \Rightarrow t = a \end{cases}$

$dt = -dx \Rightarrow$

$\int_a^b f(a+b-x)dx = \int_b^a f(t)(-dt)$

$= -\int_b^a f(t)dt = \int_a^b f(t)\, dt$

$= \int_a^b f(x)\, dx$

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx}$$

2) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{\cos^3 x + \sin^3 x} dx$,

$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x + \sin^3 x} dx$

on pose $f(x) = \frac{\cos^3 x}{\cos^3 x + \sin^3 x}$,

$x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

f est continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ car quotient de deux fonction continues

on prend : $a = 0$, $b = \frac{\pi}{2}$

donc $a + b - x = \frac{\pi}{2} - x$

$f(a+b-x) = f(\frac{\pi}{2} - x)$

$= \frac{\cos^3(\frac{\pi}{2} - x)}{\cos^3(\frac{\pi}{2} - x) + \sin^3(\frac{\pi}{2} - x)}$

$= \frac{\sin^3 x}{\sin^3 x + \cos^3 x}$

D'après ① :

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\frac{\pi}{2} - x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$

$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{\sin^3 x + \cos^3 x} dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{\cos^3 x + \sin^3 x} dx$

$\boxed{J = I}$

on a $I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x + \sin^3 x}{\cos^3 x + \sin^3 x} dx$

$I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = [x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$

$\boxed{I + J = \frac{\pi}{2}}$

$\begin{cases} I = J \\ I + J = \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \boxed{I = J = \frac{\pi}{4}}$

3) on pose $f(x) = \sqrt{\cos x} - \sqrt{\sin x}$

$a = \frac{\pi}{6}$, $b = \frac{\pi}{3}$

f est continue sur $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$

on a : $f(a+b-x)$

$= f(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} - x) = f(\frac{\pi}{2} - x)$

$= \sqrt{\cos(\frac{\pi}{2} - x)} - \sqrt{\sin(\frac{\pi}{2} - x)}$

$= \sqrt{\sin x} - \sqrt{\cos x} = -f(x)$

D'après ①:

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} f(x)\,dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx$$

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} f(x)\,dx = -\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} f(x)\,dx$$

$K = -K \Rightarrow K = 0$

Toutou/cheikhna oumousselemta/Seyid Minetou/el Koy

Integrales - Primitives

Exercice 8

On pose : $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin^2 x\,dx$; $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos^2 x\,dx$;

1) Calculer I+J

2) En utilisant une intégration par parties, calculer I-J ,

3) En déduire I et J.

Solution - exo 8

1/ $I+J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x\sin^2 x + x\cos^2 x)\,dx$

$I+J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\sin^2 x + \cos^2 x)\,dx$

$I+J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,dx$

$I+J = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$I+J = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - 0^2\right]$

$$\boxed{I+J = \frac{\pi^2}{8}}$$

2) on'a $I-J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x\sin^2 x - x\cos^2 x)\,dx$

$I-J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\sin^2 x - \cos^2 x)\,dx$

$I-J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-x\cos 2x)\,dx$

On utilise une intégration par parties :

on pose : $\begin{cases} U(x) = -x \\ V'(x) = \cos 2x \end{cases}$

Alors : $\begin{cases} U'(x) = -1 \\ V(x) = \frac{1}{2}\sin 2x \end{cases}$

Comme $\int uv' = uv - \int u'v$

$I-J = \left[-x \times \frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{1}{2}\sin 2x\right)dx$

$I-J = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2x)\,dx$

$I-J = -\frac{1}{4}\cos\pi + \frac{1}{4}\cos 0$

$$\boxed{I-J = \frac{1}{2}}$$

On résout le système

: $\begin{cases} I+J = \frac{\pi^2}{8} \\ I-J = \frac{1}{2} \end{cases}$

Par addition

: $2I = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{I = \frac{\pi^2+8}{16}}$

Par soustraction

: $2J = \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{J = \frac{\pi^2-6}{16}}$

Minetou Mbareck elKory   Toutou cheikhna   oumou selemete/sejid

Integrales - Primitives

Exercice 2 Chacun

Soit la fonction f définie par: $f(x)=\dfrac{x^3+3x^2+3x-3}{(x+1)^2}$

1) Déterminer les réels a ;b ;c tels que : $\forall x \in D_f, f(x)=ax+b+\dfrac{c}{(x+1)^2}$

2) En déduire une primitive de f.

solution

Primitives - integrales

1) $ax+b+\dfrac{c}{(x+1)^2}=f(x)$

$\forall x \in Df$

$=\dfrac{(x+1)^2(ax+b)+c}{(x+1)^2}=f(x)$

$\forall x \in Df$

$\dfrac{(x^2+2x+1)(ax+b)+c}{(x+1)^2}$

$f(x)\ \forall x \in Df$

$\Rightarrow \dfrac{ax^3+bx^2+2ax^2+2bx+ax+b+c}{(x+1)^2}$

$=f(x)\ \forall x \in Df$

$\dfrac{ax^3+(b+2a)x^2+(2b+a)x+b+c}{(x+1)^2}$

$=\dfrac{x^3+3x^2+3x-3}{(x+1)^2}$

par identification

$\begin{cases} ax^3 = x^3 \\ b+2a = 3 \\ 2b+a = 3 \\ b+c = -3 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 3-2\times 1 = 1 \\ 2\times 1+1 = 3 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = -4 \end{cases}$

$\forall x \in Df$

$f(x) = x+1-\dfrac{4}{(x+1)^2}$

$\Rightarrow f(x) = x+1\dfrac{-4}{(x+1)^2}$

2) $\forall x \in Df = \dfrac{1}{2}x^2+x+\dfrac{4}{(x+1)}+c$

est une primitive de f sur l'intervalle $]-\infty;-1[$ et $]-1;+\infty[$

Minelou Mbareck Elkory
Toutou Cheikhna
Oumou Selimeta Iseyid

Integrals - Primitives

Exercice 16 :

Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$ en utilisant la fonction donnée f dans chacun des cas suivants :

1) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$; $S_n = \frac{1}{n}\left[\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2+\frac{1}{n}}} + \frac{1}{\sqrt{2+\frac{2}{n}}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2+\frac{n-1}{n}}}\right]$

2) $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$; $S_n = n\left[\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots \frac{1}{(2n-1)^2}\right]$

3) $f(x) = \cos^2 x$; $S_n = \frac{\pi}{n}\left[1 + \cos^2\frac{\pi}{n} + \cos^2\frac{2\pi}{n} + \cdots + \cos^2\frac{(n-1)\pi}{n}\right]$

Solution :

Si $c_n = \frac{b-a}{n}\sum\limits_{K=0}^{n-1} f\left(a + K\left(\frac{b-a}{n}\right)\right)$

Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} c_n = \int_a^b f(x)\,dx$.

1) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$; $S_n = \frac{1}{n}$

$\left[\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2+\frac{1}{n}}} + \frac{1}{\sqrt{2+\frac{2}{n}}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2+\frac{n-1}{n}}}\right]$

$= \frac{2-1}{n}\left(f(1) + f\left(1+\frac{1}{n}\right) + f\left(1+\frac{2}{n}\right) + \cdots + f\left(1+\frac{n-1}{n}\right)\right)$

$S_n = \frac{2-1}{n}\sum\limits_{K=0}^{n-1} f\left(1 + \frac{K(2-1)}{n}\right)$

$\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx$

$= \left[2\sqrt{x+1}\right]_1^2 = 2\sqrt{3} - 2\sqrt{2}$

2) $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$; $S_n = n$

$\left[\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots \frac{1}{(2n-1)^2}\right]$

$= n\left[\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n(1+\frac{1}{n}))^2} + \cdots + \frac{1}{(n[2-\frac{1}{n}])^2}\right]$

$= n \times \frac{1}{n^2}\left[1 + \frac{1}{(1+\frac{1}{x})^2} + \cdots + \frac{1}{(1+\frac{n-1}{n})^2}\right]$

$= \frac{1-0}{n}\left[f(0) + f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{n-1}{n}\right)\right]$

$\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \int_0^1 \frac{1}{(x+1)^2}\,dx$

$= \left[\frac{-1}{x+1}\right]_0^1 = \frac{-1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$

3) $f(x) = \cos^2 x$; $S_n = \frac{\pi}{n}$

$\left[1 + \cos^2\frac{\pi}{n} + \cos^2\frac{2\pi}{n} + \cdots + \cos^2\frac{(n-1)\pi}{n}\right]$

$a = 0$ $\quad b = \pi$

$S_n = \frac{\pi}{n}\sum\limits_{K=0}^{n-1} f\left(\frac{K\pi}{n}\right)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} S_n = \int_0^{\pi} \cos^2 x\,dx$

$= \int_0^{\pi} \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx = \left[\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{\pi}$

$= \frac{\pi}{2}$

Toutou . Cheikhna oumousaleme ta / Seyid Minetou / elKory

Exercice 14

pour tout entier naturel $n \geq 2$ et pour $K \leq n$ on pose :

$I_{K,n} = \int_0^1 C_n^K x^K (1-x)^{n-K} \, dx$

1) Montrer que l'intégrale $I_{K,n}$ existe pour tout n

2) En utilisant une intégration par parties, trouver une relation entre $I_{K,n}$ et $I_{K+1,n}$. En déduire $I_{K,n}$ en fonction de K et n.

Solution :

$I_{K,n} = \int_0^1 C_n^K x^K (1-x)^{n-K} \, dx$

1) La fonction $(x \mapsto C_n^K x^K (1-x)^{n-K})$ est continue sur $[0,1]$ pour tout K et $n \in \mathbb{N}$ tels que $0 \leq K \leq n$, $n \geq 2$ car un polynome (en developpant) Alors l'integrale $I_{K,n}$ existe pour tout n et K.

2) En utilisant une I.P.P, on pose $\begin{cases} u'(x) = C_n^K x^K \\ v(x) = (1-K)^{n-K} \end{cases}$

Alors $\begin{cases} u(x) = \frac{C_n^K}{K+1} x^{K+1} \\ v'(x) = -(n-K)(1-x) \end{cases}$

$\int u'v = [uv] - \int uv'$

$I_{K,n} = \left[\frac{C_n^K}{K+1} x^{K+1} (1-x)^{n-K} \right]_0^1 - \int_0^1 -\frac{(n-K)}{K+1} C_n^K x^{K+1} . (1-x)^{n-K-1} \, dx$

$I_{K,n} = 0 + \int_0^1 \frac{n-K}{K+1} C_n^K x^{K+1} (1-x)^{n-(K+1)} \, dx$

on a : $C_n^{K+1} = \frac{n!}{(K+1)!(n-K-1)!}$

$= \frac{n! \quad \times (n-K)}{(K+1)K!\,(n-K)(n-K-1)!}$

$= \frac{n-K}{K+1} \cdot \frac{n!}{K!\,(n-K)!}$

$C_n^{K+1} = \frac{n-K}{K-1} C_n^K$

Alors, en remplacant

$I_{K,n} = \int_0^1 C_n^{K+1} x^{K+1} (1-x)^{n-(K+1)} \, dx$

$\boxed{I_{K,n} = I_{K+1,n}}$

on en deduit que la suite $(I_{K,n})$ est constante par rapport à K.

Cad : $I_{K,n} = I_{n,n} = I_{n,n}$ (independant de K)

$I_{n,n} = \int_0^1 C_n^n x^n (1-x)^0 \, dx$

$I_{n,n} = \int_0^1 x^n \, dx = \left[\frac{1}{n+1} x^{n+1} \right]_0^1$

$\boxed{I_{n,n} = \frac{1}{n+1}}$ Alors $\boxed{I_{K,n} = \frac{1}{n+1}}$

pour tout $K \leq n$

Autre methode :

comme $I_{K,n}$ est constante par rapport à K, on a alors

$\sum_{K=0}^{n} I_{K,n} = (n+1) I_{K,n}$

on a : $\sum_{K=0}^{n} I_{K,n} = \sum_{K=0}^{n} \int_0^1 C_n^K x^K (1-x)^{n-K} \, dx$.

$$\sum_{K=0}^{n} I_{K,n} = \int_0^1 \sum_{K=0}^{n} C_n^K x^K (1-x)^{n-K}\, dx$$

$$= \int_0^1 (x + (1-x))^n \, dx$$

$$= \int_0^1 dx = [x]_0^1$$

$$\sum_{K=0}^{n} I_{K,n} = 1 \Rightarrow (n+1) I_{K,n} = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{I_{K,n} = \frac{1}{n+1}}$$

http://maurimath.net/Espaceeleves.php

Minetou Mbareck elkory
TouTou cheikhna
oumou selemeti lmeyid

Generalité sur les fonction

Exercice 7 voir cahier d'exo

Soit f et g les fonctions définies par : $f(x) = x^2 - 2x + a$, $g(x) = -x^2$

Déterminer le réel a pour que les courbes représentatives de f et de g, dans le même repère orthonormé, aient une tangente commune en un point.

solution exo 7

$f(x) = x^2 - 2x + a$
et $g(x) = -x^2$

en un point d'abscisse x_0
une equation de la tangente a C_f est
$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$
et une equation a la tangente a C_g
$y = g'(x_0)(x - x_0) + g(x_0)$
on doit donc avoir
$$\begin{cases} f'(x_0) = g'(x_0) \\ f(x_0) = g(x_0) \end{cases}$$

calculon $f'(x_0)$ et $g'(x_0)$
$f'(x_0) = 2x - 2$
et
$g'(x_0) = -2x_0$

Donc on doit avoir
$$\begin{cases} x_0^2 - 2x_0 + a = -x_0^2 & (1) \\ 2x_0 - 2 = -2x_0 & (2) \end{cases}$$

De (2) on a
$4x_0 = 2 \Rightarrow \boxed{x_0 = \frac{1}{2}}$

et en remplaçant dans (1) on obtient
$\frac{1}{4} - 1 + a = -\frac{1}{4}$
$\Rightarrow a = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}$
$\Rightarrow a = 1 - \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$

$$\boxed{a = \frac{1}{2}}$$

http://maurimath.net/Espaceeleves.php

Toutou /cheikhna   oumou selemeta/Seyid   Minetou/el Kory

exercice 10

soit m un réel $f_m(x) = x + \frac{m}{2x^2}$

on designe par (C_m) sa courbe representative dans un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$

1) etudier les variation de F_m

2) montrer que (C_m) est l'image de (C_1) par une homothétie de centre o dont on precisera le rapport

3) soit $M(x_0, y_0)$ un point de (C_1): la tangente en M a (C_1) coupe oy en H. coupe la droite Δ d'équation $y = x$ en K et coupe (C_1) en M' montrer que $\vec{MK} = \vec{M'H}$ et $\vec{MH} = a\vec{MK}$

solution exo 10

$f_m(x) = x + \frac{m}{2x^2}$

1) $f(x)$ est definie sur $2x^2 \neq 0$

Donc $Df_m = \mathbb{R} / \{0\}$
$=]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

comme $f_m(x)$ est la somme d'une fonction polynome $x \to 2x$ et d'une fonction rationnelle $x \to \frac{m}{2x^2}$ donc $f_m(x)$ et continue et derivable sur Df

2) pour $m = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}^*$

$f_0(x) = x$

$\lim\limits_{x \to +\infty} = f_0(x) \Rightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 0} f_0(x) = \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f_0(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$

$\forall x \in \mathbb{R}^*$ $f'(x) = 1 > 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'_0(x)$			$\|\|$		
$f_0(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$0 \;\|\|\; 0$	$\nearrow$	$+\infty$

3) pour $m > 0$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(x + \frac{m}{2x^2}\right)$

$= -\infty + 0 = -\infty$

$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \left(x + \frac{m}{2x^2}\right)$

$= 0 + \frac{m}{0^+} = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(x + \frac{m}{2x^2}\right)$

$+\infty + 0 = +\infty$

$f_m'(x) = 1 - \frac{4m}{4x^4}$

$= -1 - \frac{m}{x^3} = \frac{x^2 - m}{x^3}$

$\forall x \in \mathbb{R}^* = f_m'(x) = \frac{x^2 - \cancel{x}}{x^3}$

$x^3 - m = 0 \Rightarrow x^3 = m$

$\Rightarrow x = \sqrt[3]{m}$

x	$-\infty$	0	$\sqrt[3]{m}$	$+\infty$
$x^3 - m$	$-$	$-$ 0	$+$	
x^n	$-$ 0	$+$	$+$	
$\frac{x^2 - x}{x^3}$	$+$ ‖	$-$ 0	$+$	

T.V de f_m $(m > 0)$

x	$-\infty$	0	$\sqrt[3]{3m}$	$+\infty$
$f_m'(x)$	$+$	‖ $-$	0 $+$	
$f_m(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$	‖ $+\infty$		$\to +\infty$

3) pour $m < 0$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(x + \frac{m}{2x^2}\right) = -\infty + 0 = -\infty$

$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim \left(x + \frac{m}{2x^2}\right) = 0 + \frac{m}{0^+} = -\infty$

$\lim f_m(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(x + \frac{m}{x^3}\right) = +\infty + 0 = +\infty$

$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f_m'(x) = \frac{x^2 - x}{x^3}$

$x^3 - m = 0 \Rightarrow x^3 = m$

$x = -\sqrt[3]{-x}$

x	$-\infty$	$-\sqrt[3]{-x}$	0	$+\infty$
$x^2 - m$	$-$	0 $+$	$+$	
x^3	$-$	$-$	0 $+$	
$\frac{x^2 - x}{x^3}$	$+$	0 $-$	‖ $+$	

Toutou / cheikhna   oumoulkelemeta / seyid   Minetou / elkory

Generalité sur les Fonction

Exercice 1

Soit f la fonction de variable réelle définie par : $f(x)=\frac{x+x^2+...+x^{2015}-2015}{x-1}$

Calculer $\lim_{x\to 1}\frac{x^k-1}{x-1}$, $(k\in IN^*)$ en déduire $\lim_{x\to 1} f(x)$

solution exo 1

$\lim_{x\to 1}\frac{x^K-1}{x-1}=\frac{1^K-1}{1-1}=\frac{0}{0}$

F.I

on pose $g(x)=x^K$

$\begin{cases} g(1)=1 \\ g'(x)=K.x^{K-1}\end{cases}$

$g'(1)=K$

$\lim_{1}\frac{x^K-1}{x-1}=$

$\lim_{1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=g'(1)=K$

Autre Methode

on a

$1+x+x^2+x^3+x^n=1\times\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$

$=\frac{x^{n+1}-1}{x-1}$

$\Rightarrow 1+x+x^{K-1}=\frac{x^K-1}{x-1}$

$\Rightarrow \lim_{1}\frac{x^K-1}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1}(1+x+x^2+x^{K-1})$

$=1+1+1+1=K$

$\lim_{1}=f(x)=\frac{x+x^2+x^{2015}-2015}{x-1}$

$=\lim_{1}\left[\frac{x^1-1}{x-1}+\frac{x^2-1}{x-1}-\frac{x^{2015}-1}{x-1}\right]$

$=(1+2+3 \ldots +2015)$

$=\frac{2015}{2}(1+2015)$

$=2015\times 1008$

somme de termes de S.A

$=\frac{\text{nombre de terme}}{2}(1^{\text{ere}}\text{ terme}+\text{D}^{\text{ere}})$

Exercice 4

Soit f une fonction continue sur un intervalle [a,b] telle que: $f(a) < ab$ et $f(b) > b^2$.
Démontrer qu'il existe un réel c de [a,b] tel que $f(c) = bc$.
(On pourra appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction $x \mapsto f(x) - bx$).On

solution exo4

Soit $h(x) = f(x) - bx$

$h(a) = f(a) - ba < ab - ab < 0$

$h(b) = f(b) - b.b > b^2 - b^2 > 0$

$\Rightarrow h(a) \times h(b) < 0$

$0 \in h(I)$

D'apres le Theoreme des valeur intermediaire (T.V.I)

il existe $0 \in [0, I]$

$h(c) = 0$

$f(c) - bc = 0$

$\Rightarrow f(c) = bc$

Exercice 16 :

$$\text{Si } C_n = \frac{b-a}{n}\sum_{K=0}^{n-1} f\left(a+K\frac{(b-a)}{n}\right)$$

$$\text{Alors } \lim_{n\to+\infty} C_n = \int_a^b f(x)\,dx$$

1) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$

$$S_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2+\frac{1}{n}}} + \frac{1}{\sqrt{2+\frac{2}{n}}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2+\frac{n-1}{n}}}\right)$$

$$= \frac{2-1}{n}\left(f(1) + f\left(1+\frac{1}{n}\right) + f\left(1+\frac{2}{n}\right) + \cdots + f\left(1+\frac{n-1}{n}\right)\right)$$

$$S_n = \frac{2-1}{n}\sum_{K=0}^{n-1} f\left(1+\frac{K(2-1)}{n}\right)$$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx = \left[2\sqrt{x+1}\right]_1^2 = 2\sqrt{3} - 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n = 2(\sqrt{3}-\sqrt{2})}$$

2) $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$

$$S_n = n\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)^2}\right)$$

$$= n\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n(1+\frac{1}{n}))^2} + \cdots + \frac{1}{(n(2-\frac{1}{n}))^2}\right)$$

$$= n\times\frac{1}{n^2}\left(1 + \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^2} + \cdots + \frac{1}{(1+\frac{n-1}{n})^2}\right)$$

$$= \frac{1-0}{n}\left(f(0) + f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{n-1}{n}\right)\right)$$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_0^1 \frac{1}{(x+1)^2}\,dx = \left[\frac{-1}{x+1}\right]_0^1 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{2}}$$

3) $f(x) = \cos^2 x$

$$S_n = \frac{\pi}{n}\left(1 + \cos^2\left(\frac{\pi}{n}\right) + \cos^2\frac{2\pi}{n} + \cdots + \cos^2\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right)\right)$$

$$a = 0\,;\ b = \pi \qquad S_n = \frac{\pi}{n}\sum_{K=0}^{n-1} f\left(\frac{K\pi}{n}\right)$$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_0^\pi \cos^2 x\,dx = \int_0^\pi \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx$$

$$= \left[\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^\pi$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{\pi}{2}}$$

Noms	Fatimetou m/Mohamed Mahmoud
	Kadijetou m/Isselkou

Primitives et Integrales

Exercice 18 : $f(x)=\sqrt{\frac{x}{1-x}}$

Partie A

1) f est definie ssi $\begin{cases} 1-x \neq 0 \\ \text{et} \\ \frac{x}{1-x} \geq 0 \end{cases}$

	$-\infty$	0	1	$+\infty$
x	$-$	0 $+$		$+$
$1-x$	$+$	$+$	0	$-$
$\frac{x}{1-x}$	$-$	0 $+$		$-$

$D_f = [0,1[$ f est continue sur $D_f = [0,1[$ et derivable sur $]0,1[$

Etudions la derivabilite de f à droite en 0

- $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{\frac{x}{1-x}}-0}{x-0} = \frac{0}{0}$ F.I

$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{\frac{x}{1-x}}}{x} = \frac{\frac{x}{1-x}}{x\sqrt{\frac{x}{1-x}}} = \frac{x}{x(1-x)\sqrt{\frac{x}{1-x}}}$

$\lim\limits_{x\to 0^+} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

Donc f n'est pas derivable à droite en 0 et $\mathcal{C}$ admet une demi-tangente verticale dirigée vers le haut à droite de point $(0;0)$

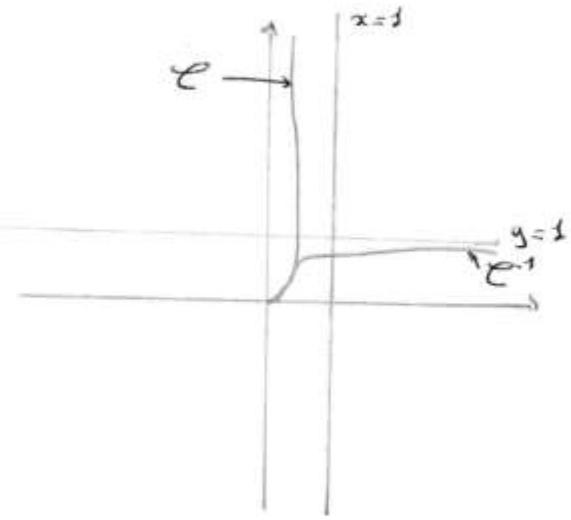
$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = 0$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \sqrt{\frac{x}{1-x}} = +\infty$

- $x=1$ A.V à $\mathcal{C}$
- $\forall x \in]0,1[$ $f'(x) = \frac{\frac{1-x+1}{(1-x)^2}}{2\sqrt{\frac{x}{1-x}}}$

$f'(x) = \frac{1}{2(1-x)^2\sqrt{\frac{x}{1-x}}} > 0$

x	0	1
$f'(x)$	$+$	
f	0 ↗	$+\infty$



2) Comme f est continue et strictement monoton sur l'intervalle $[0,1[$ elle réalise une bijection de $[0,1[$ sur l'intervalle $J=f([0,1[)=[0,+\infty[$

et elle admet donc une fonction réciproque f^{-1} définie sur $[0,+\infty[$

$f^{-1}(x)=y \Rightarrow f(y)=x$

$\Leftrightarrow \frac{y}{1+y^2}=x^2 \Leftrightarrow y=x^2-yx^2 \Rightarrow y+yx^2=x^2$

$\Leftrightarrow y(1+x^2)=x^2 \Rightarrow \boxed{y=\frac{x^2}{1+x^2}}$ donc

$\forall x\in[0,+\infty[\ \boxed{f^{-1}(x)=\frac{x^2}{1+x^2}}$

* La courbe $\mathcal{C}'$ de f^{-1} le symétrique de $\mathcal{C}$ par rapport à la droite l'équation $y=x$

3) le symétrique par rapport à la droite $y=x$ du domaine D délimité par $(\mathcal{C})$ et les droites d'équation $x=0$ et $y=1$ est le domaine D' délimité par $\mathcal{C}'$ et de droite d'équation $y=0$ et $x=1$ or l'aire du D' est

$$\int_0^1 f^{-1}(x)\,dx=\int_0^1\frac{x^2}{1+x^2}dx$$

Partie B

1) $\forall x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

$F(x)=\int_0^{\tan x}\frac{\varphi(t)}{1+t^2}\,dt$

Comme les fonctions $u(x)=0$ et $v(x)=\tan x$ sont dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ et tan prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$ et comme la fonction $g(t)=\frac{\varphi(t)}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, la fonction F est donc dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

$F'(x)=v'(x)g(v(x))-u'(x)g(u(x))$

or $F'(x)=(1+\tan^2 x)g(\tan x)+0g(0)$

$=(1+\tan^2 x)\left(\frac{\varphi(\tan x)}{1+\tan^2 x}\right)=\varphi(\tan x)$

2.a) $\varphi(t)=1$

Donc $\forall x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ $g'(x)=1$

D'où $\forall x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ $F'(0)=1$

Donc il existe une constante C telle que

$\forall x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

$F(x)=x+C$ or $0\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$;

d'où d'une part :

$F(0)=\int_0^{\tan 0}\frac{1}{1+t^2}dt=\int_0^0\frac{1}{1+t^2}dt=0$

D'autre part :

$F(0)=0+C=C$ Donc $C=0$

D'où $\boxed{\forall x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\ F(x)=x}$

b) $\varphi(t)=t^2$ Donc $\forall x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ $F'(x)=\varphi(\tan x)$

d'où $\forall x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ $F'(x)=\tan^2 x=1+\tan^2 x-1$

Donc il existe une constante C telle que $\forall x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

$F(x)=\tan x-x+C$

or $0\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ d'où d'une part $F(0)=\int_0^{\tan 0}\frac{t^2}{1+t^2}dt=0$

et d'autre part $F(0)=\tan(0)=0+C \Rightarrow C=0$

D'où $C=0$ Donc

$\boxed{\forall x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\ g(x)=\tan x-x}$

3) $I=\int_0^1\frac{1}{1+t^2}dt=\int_0^{\tan\frac{\pi}{4}}\frac{\varphi(t)}{1+t^2}dt$

où φ est la fonction définie

Donc $I=F\left(\frac{\pi}{4}\right)$ lorsque $\varphi(t)=1$ or dans ce cas

on a $\forall x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ $F(x)$ et $\frac{\pi}{4}\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ D'où

$F\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2}$ D'où $\boxed{I=\frac{\pi}{4}}$ $\Longrightarrow$ (Suite)